Notation :

on note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$. ($T \in \mathcal{D}'$)

Rq :

- une distribution T est une distribution réelle si $\langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$ pour $\varphi \in \mathcal{D}$
- Tout distribution peut s'écrit sous la forme : $T = R + iS$ où R et S deux dist. réelles.
  avec : pour $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle T, \varphi \rangle = \langle R, \varphi \rangle + i \langle S, \varphi \rangle$
- si T est une distribution complexe ;
  on définit la distribution conjugué notée $\overline{T}$ par :
  $$\langle \overline{T}, \varphi \rangle = \overline{\langle T, \overline{\varphi} \rangle} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$
- soient $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et λ : scalaire, Alors $(T_1 + T_2)$ et (λT_1) sont des dist. :
  - $\langle T_1 + T_2, \varphi \rangle = \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}$
  - $\langle \lambda T_1, \varphi \rangle = \lambda \langle T_1, \varphi \rangle$; $\forall \varphi \in \mathcal{D}$

  Donc $\mathcal{D}'$ est un e.v.

Déf :

- Une dist T est dite positive si : $\forall \varphi \in \mathcal{D}$; $\varphi \geq 0$ on a : $\langle T, \varphi \rangle \geq 0$
- une dist T est dite nulle sur Ω si : $\langle T, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$
- $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$: on a $T_1 = T_2$ sur Ω ; si : $\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$; $\varphi \in \mathcal{D}$
- Le support d'une dist T est le complémentaire Ω plus grand ouvert sur lequel T s'annule. $\operatorname{supp} T \subset \Omega$

3. Exemples des distributions :

a. Distribution associée à une fonction localement intégrable :

Déf 1 : une f$^{\text{ct}}$ f est dite localement intégrable sur Ω (note. : $f \in L^1_{loc}(\Omega)$) si elle intégrable sur tout compact inclu dans Ω (c-à-d pour tout compact K de $\mathbb{R}$ $\int_K f(x)\,dx < +\infty$)

Déf 2 : soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, Alors l'app définie par :

$$T_f : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K} (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$
$$\varphi \longmapsto \langle T, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \text{ est une}$$

Scanné avec CamScanner

dist associée à f.

Rque : ⊛ Cas $\Omega = \mathbb{R}$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

⊛ Cas $\Omega = \mathbb{R}^2$: $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$; $\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\varphi(x,y)\,dx\,dy$

① Dém (EX) : ($\Omega = \mathbb{R}$)

⊛ soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$; il existe $[-a,a] \subset \mathbb{R}$ tq $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$

on a $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx$: $\int_{\mathbb{R}} |f(x)\varphi(x)|\,dx = \int_{-a}^{a} |f(x)||\varphi(x)|\,dx$ ($< +\infty$ car $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (donc))

$\leq \left(\sup_{x\in[-a,a]} |\varphi(x)|\right) \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx < +\infty$

⊛ T_f est une Dist, en effet :

• (avec la théorème de l'intégrale)

$\langle T_f, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle T_f, \varphi_1 \rangle + \langle T_f, \varphi_2 \rangle$

$\langle T_f, \alpha\varphi_1 \rangle = \alpha \langle T_f, \varphi_1 \rangle$

• soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}$ tq $\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} 0$ mque : $\langle T_f, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T_f, \varphi \rangle$?

$|\langle T_f, \varphi_n \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| = |\langle T_f, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(\varphi_n(x) - \varphi(x))\,dx\right|$

$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)||\varphi_n(x) - \varphi(x)|\,dx \leq \left(\sup_{x\in K \text{ compact}} |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ ($\to 0$; $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx < +\infty$)

(K : $\int_{-\infty}^{K}$)

[$\varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} 0$

• $\exists$ un compact K tq $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$

• $\forall k \in \mathbb{N}$ $\sup_K |\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}| \xrightarrow[+\infty]{} 0$]

Rq :

• ~~Tout~~ f loc. intégrable donc elle est $\in \mathcal{D}'$ distrib.

• Tout f continue $\Rightarrow$ elle est aussi intégrable loc.

Exp : (Exercice 3)

Rque : si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \cdots dx_n$

- b - Distribution de Dirac :

Scanné avec CamScanner

Déf: soit $a \in \mathbb{R}$, la forme linéaire définie par: $(\delta_a = \delta_0 = \delta)$

$$\delta_a : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{K} \ (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$$
$$\varphi \longmapsto \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$$

(dist. à l'origine pour $a=0$)

est une dist. de Dirac en a.

(cas général: $\text{supp}\, \delta_a = \{a\}$)

Exp (Exercice 4)

4- Dérivation au sens de distribution:

Déf: on appelle dérivée d'une distribution T, la dist notée T' définie par la relation: $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

(si T est une fct $\mathcal{C}^1 \Rightarrow T'$ est dist

(Exercice 11)

App (Ex 14):

App (Ex 12)

Scanné avec CamScanner

-5- Opérations sur les distributions :

* **Déf :**
Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ Alors (gT) est une distribution définie par
$\langle gT, \varphi \rangle = \langle T, g\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$

* **App (Exg) :**

* **Proposition 1 :**
Soit $T \in \mathcal{D}'$ et $g \in \mathcal{C}^\infty$ Alors la suite (gT) est dérivable et on a :

$(gT)' = g'T + gT'$

gT' : distribution produit
$g'T$: distribution produit

* **App (Exo) :**

* **Proposition 2 :**
$T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^\infty$, on a :

-1- $(g_1 + g_2)T_1 = g_1 T_1 + g_2 T_2$

-2- $(g_1 g_2)T_1 = g_1 (g_2 T_2)$

-3- $g_1(T_1 + T_2) = g_1 T_1 + g_1 T_2$

* **Déf :** Soit $T \in \mathcal{D}'$; Notons :
- $(\tau_a f)(x) = f(x-a)$
- $(h_a f)(x) = f(ax)$
- $\check{f}(x) = f(-x) =$

Alors on a :
(*) $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle T, \tau_{-a}\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$ ($T(x-a)$)
(*) $\langle h_a T, \varphi \rangle = \frac{1}{|a|} \langle T, h_{\frac{1}{a}}\varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$
(*) $\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$

1) Dém (Distribution régulière)

par exp : $\langle T_{f(ax)}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(ax)\varphi(x)\,dx$

$f(x-a)$

(5) $f(-x)$

chgt de variable $y = ax$
$x - a$
$-X$

Scanné avec CamScanner

* App: (Ex 16)

6- Convergence d'une suite des distributions:

Déf: Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions. On dit que T_n converge vers la distribution T si: $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ On a: $\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$ et on note:

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{D}'} T$$

* **Exp:** Calculer $\lim_{k\to+\infty} \delta_k = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ On a: $\lim_{k\to+\infty} \langle \delta_k, \varphi(x)\rangle = \lim_{k\to+\infty} \varphi(k) = 0$ car φ est à support compact

Donc $\delta_{k\to+\infty} \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$

* **App:** Calculer:

1- $\lim_{n\to+\infty} n(\delta_{1/n} - \delta_{\frac{1}{n}})$

2- $\lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta)$

3- $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} T_{e^{-n^2x^2}}$

4- $\lim_{n\to+\infty} T_{\sin(nx)}$

* **Corr:** Soit $\varphi \in \mathcal{D}$

1- $\lim_{n\to+\infty} \langle n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}), \varphi(x)\rangle = \lim_{n\to+\infty} n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$= \lim_{n\to+\infty} n\left[\varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0) - \varphi(0) + \frac{1}{n}\varphi'(0)\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{2}{n}\varphi'(0)\right]$

$= 2\varphi'(0) = 2\langle \delta_0, \varphi(x)\rangle = -2\langle \delta', \varphi\rangle = \langle -2\delta', \varphi\rangle$

D.L:
$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0) + \frac{x^3}{3!}\varphi^{(3)} + \dots$

Alors: $\lim_{n\to+\infty} n(\delta_{1/n} - \delta_{-1/n}) = -2\delta'$

2- $\lim_{n\to 0} \left\langle \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta), \varphi\right\rangle = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}\left(\varphi(2n) + \varphi(-2n) - 2\varphi(0)\right)$

$= \lim_{n\to 0} \frac{1}{n^2}\left[\varphi(0) + 2n\varphi'(0) + \frac{(2n)^2}{2}\varphi''(0) + \varphi(0) - 2n\varphi'(0) + \frac{(-2n)^2}{2}\varphi''(0) - 2\varphi(0)\right]$

$= \lim_{n\to 0} \frac{4}{n^2} n^2\varphi''(0) = 4\varphi''(0) = 4\langle \delta, \varphi''(x)\rangle = \langle 4\delta'', \varphi\rangle$

$= \lim_{n\to 0} \frac{4}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta) \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}'} 4\delta''$

$\Rightarrow \frac{1}{n^2}(\delta_{2n} + \delta_{-2n} - 2\delta) \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}'} 4\delta''$

3- $\left\langle \frac{n}{\sqrt{\pi}} T_{e^{-n^2x^2}}, \varphi(x)\right\rangle = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2x^2}\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$

Changement de variable: $y = nx \Leftrightarrow dy = n\,dx$

Scanné avec CamScanner

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) dy \overset{TCD}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)\right) dy$$

Intégrale de Gauss

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \varphi(0)\, dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varphi(0) \sqrt{\pi} = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

* TCD :
- $x \longmapsto e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)$ est une suite de fct°.
- $e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) \xrightarrow[+\infty]{} \varphi(0) e^{-y^2}$: intég
- $\left| e^{-y^2} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2}$: intég.

- 4 - $\lim_{n\to+\infty} \langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle = \int_{-a}^{a} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$$

IPP : $\varphi(x) \longrightarrow \varphi'(x)$
$\sin(nx) \longmapsto -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$= \left[-\frac{1}{n} \cos(nx)\, \varphi(x) \right]_{-a}^{a} + \frac{1}{n} \int_{-a}^{+a} \cos(nx)\, \varphi'(x)\, dx$$

Alors :

$$\left| \langle \sin(nx), \varphi(x) \rangle \right| \leq \frac{1}{n} \int_{-a}^{a} |\cos(nx)|\, |\varphi'(x)|\, dx$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n} \sup |\varphi'(x)| \int_{-a}^{a} dx}_{-2a}$$

$\downarrow n \to +\infty$

0

Alors : $\sin(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{ds\, \mathcal{D}'} 0$

(convergence de dérivée)

Prop : Soit $(T_n)_n$ une suite de dist. qui CV vers la dist. T. Alors la suite $(T_n')_n$ converge vers T'

Exemple : Soit la suite : $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$;
f_n converge vers zero mais au sens de fct°, la suite $(f_n') = (\cos(nx))_n$ diverge

Scanné avec CamScanner

mais : suites de dist. : $\cos(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{dans\ D'} 0$

7- Produit de Convolution des distributions :

Déf : on définit le produit de convolution de 2 dist. S et T (si elle existe) par : $\langle S*T, \varphi\rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

où S_x (resp T_y) désigne par le dist. S s'applique qu'à la variable x (resp T s'applique à la variable y)

Exple : Calculer $\delta_a * \delta_b = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle \delta_a * \delta_b, \varphi\rangle = \langle \delta_{a,x}, \langle \delta_{b,y}, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

$= \langle \delta_{a x}, \varphi(x+b)\rangle$

$= \varphi(a+b) = \langle \delta_{a+b}, \varphi(x)\rangle$

$\Rightarrow \delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$

$\langle \delta_a(x), \phi(x)\rangle = \phi(a)$

Propriété :

1- $S*T = T*S$

2- $T*\delta = \delta*T = T$ (c-à-d : δ_0 c'est l'élément neutre de $*$)

3- $(T*S)' = T'*S = T*S'$

cas général : $(T*S)^{(n)} = T^{(n)}*S = T*S^{(n)}$

$D^\alpha(T*S) = D^\alpha T * S = T * D^\alpha S$

Ex : montrer que $\delta_a * T = \tau_a T$?

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle \delta_a * T, \varphi\rangle = \langle T_x, \langle \delta_{a,y}, \varphi(x+y)\rangle\rangle$

$= \langle T*\delta_a, \varphi\rangle = \langle T_x, \varphi(x+a)\rangle = \langle T_x, \tau_a \varphi(x)\rangle = \langle \tau_a T, \varphi\rangle$

Scanné avec CamScanner

Exercice 2 :

Calculer : i) $\delta' * T_{H(x)}$ ii) $\delta' * T_{\sin x\, H(x)}$ iii) $(\delta' + T_H) * T_{\cos x\, H(x)}$

Rép :

- i - $\delta' * T_H = (\delta * T_H)' = T_H' = \delta$

- ii - $\delta' * T_{\sin x\, H(x)} = (\delta * T_{\sin x\, H(x)})' = (T_{\sin x\, H(x)})'$

$= (\sin x * T_H)' = (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H'$

$= \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$

$= \cos x\, T_H + \underbrace{\sin(0)}_{=0}\delta = \cos x\, T_H = T_{\cos(x)\, H(x)}$

$T_{\sin x\, H(x)} = \sin x\, T_{H(x)} = \sin x\, H(x)$

- iii - $(\delta' + T_H)' * T_{\cos x\, H} = ((\delta' + T_H) * T_{\cos x\, H})'$ $\left[(\delta'' + T_H') * \cos x\, H\right]$

$= (\delta' * T_{\cos x} H + T_H * T_{\cos x\, H})'$ $\left[\delta'' * \cos x\, H + T_H' * \cos x\, H\right]$

$= \left[(\delta * T_{\cos x\, H})'' + (T_H * T_{\cos x\, H(x)})'\right]$ $\left[(\delta * \cos x\, T_H)'' + T_{\cos x\, H}\right]$

$= (\cos x\, T_H)'' + T_{\cos x\, H(x)}$

? $\rightarrow = (-\sin x\, T_H + \cos x\, \delta)' + T_{\cos x\, H}$

$= (-\sin x\, T_H + \underbrace{\cos x\, \delta}_{\cos\delta = \delta})' + T_{\cos x\, H}$

$= -\cos x\, T_H + \delta' + (T_H * T_{\cos x\, H})'$

$= (\sin x)' T_H - \underbrace{\sin x\, \delta}_{=0} + \delta' + T_{\cos x\, H(x)}$

$= -\cos x\, T_H + T_{\cos x\, H} + \delta'$

$= -\cos x\, T_H' + \delta' + T_{\cos x\, H} = \delta'$

$= -T_{\cos x\, H} + T_{\cos x\, H} + \delta'$

$= \delta'$

Scanné avec CamScanner

Exple 3 : Calculer le produit de convolution : $H(x) * x^2 H(x) = ?$ (au sens de distribution)

Soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$$\langle H(x) * x^2 H(x), \varphi(x) \rangle = \langle H(x), \langle x^2 (H * \varphi), \varphi(x+y) \rangle \rangle$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 \varphi(x+y)\, dy\, dx = \int_0^{+\infty} y^2 \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx \right) dy$$

Posons : $\psi(y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx$ $\quad \langle H * x^2 H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} y^2 \psi(y)\, dy$

I.P.P : $\begin{cases} \psi(y) \to \psi'(y) \\ y^2 \to \frac{1}{3} y^3 \end{cases}$

$$= \left[\frac{1}{3} y^3 \psi(y) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \psi'(y)\, dy$$

$\left[\frac{1}{3} y^3 \psi(y) \right]_0^{+\infty} = 0$ (car φ test)

$\psi(+\infty) = 0$ car φ test

$$\psi(y) = \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx$$

$$\psi'(y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{+\infty} \varphi(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \varphi(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \varphi'(x+y)\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x+y)\, dx = \left[\varphi(x+y) \right]_0^{+\infty}$$

$\varphi(+\infty) = 0$

$$= -\varphi(y)$$

$$\langle H * x^2 H, \varphi \rangle = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} y^3 \varphi(y)\, dy = \left\langle T_{\frac{1}{3} x^3 H(x)}, \varphi(x) \right\rangle$$

$\hat{T} = ?$

$$\langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi x t}\, dt\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \iint f(t) \varphi(x) e^{-2i\pi x t}\, dt\, dx \Rightarrow \int f(t) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-2i\pi x t}\, dx \right) dt$$

$\hat{\varphi}(t)$

$$= \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'$

$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{K}$

$\varphi \to \langle T, \varphi \rangle$

- 8 - Transformée de Fourier des distributions :

- a - l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

Scanné avec CamScanner

Déf : on appelle espace schwartz, noté $S(\mathbb{R})$ l'ensemble donnée par :

$$S(\mathbb{R}) = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) / \ \forall n, m \in \mathbb{N} \text{ on a : } \lim_{|x| \to +\infty} |x^m \varphi^{(n)}(x)| = 0 \right\}$$

Propriétés :

-1- S est une e.v.

-2- S est stable par T.F (si $\varphi \in S \Rightarrow \hat{\varphi} \in S$)

-3- S est stable par $*$ (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \in S$)

-4- S est stable par dérivation (si $\varphi \in S \Rightarrow \varphi' \in S$)

-5- S est stable par Multiplication (si $\varphi_1, \varphi_2 \in S \Rightarrow \varphi_1 \varphi_2 \in S$)

-6- S est stable par un polynôme (si $\varphi \in S$, P poly $\Rightarrow P\varphi \in S$)

Exp1 : $f(x) = e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$

Exp2 : $f(x) = e^{-|x|}$

- $\lim_{n \to +\infty} x^m e^{-|x|} = 0$ (décroissante rapide) $\Rightarrow f \notin S(\mathbb{R})$
- $f \notin \mathcal{C}^\infty$

Exp3 : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

- $f \in \mathcal{C}^\infty$
- $x^m \frac{1}{1+x^2} \not\to 0 \Rightarrow f \notin S(\mathbb{R})$

Scanné avec CamScanner

Feuille de TD

Exercice 1 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 \quad \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{D}$

Exercice 2

1. Soient f et g deux fonctions quelconques. Montrer que :

$$supp(fg) \subset supp\, f \cap supp\, g$$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Montrer que si $\varphi \in \mathcal{D}$ alors $f\varphi \in \mathcal{D}$.

3. Montrer que $supp(\varphi') \subseteq supp(\varphi)$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Conclure

Exercice 3 Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et expliciter la distribution associée.

Exercice 4 Montrer que la distribution δ est nulle sur tout ouvert ne contenant pas l'origine. En déduire $Supp\ \delta$

Exercice 5 Les applications suivantes définissent-elles des distributions sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ ou sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$?

1. $< T, \varphi >= |\varphi(0)|$

2. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{x^2}\, dx,$

3. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\cos(x),$

4. $< T, \varphi >= \varphi(2) - \varphi(10)$

5. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, \varphi''(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$

6. $< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,t)\, dt$

Exercice 6 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $\psi \in \mathcal{C}^{+\infty}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x) \quad et \quad |\psi(x)| \leq \| \varphi' \|_\infty$$

2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx$$

existe.

3. Montrer que $vp(\frac{1}{x})$ définie par

$$< vp(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

est une distributions.

Scanné avec CamScanner

Exercice 7 Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ sur } \{a\}, \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

la fonction caractéristique de $\{a\}$ et soit f la distribution associée à cette fonction.
Déterminer $suppf(x)$ et $suppf$.

Exercice 8 La fonction de Heaviside dite échelon unité est définie par

$$H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

et détermine une distribution notée T_H. Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels les distributions $T_H + \delta$ et $\Delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k$ (c'est la distribution peigne de Dirac) sont nulles.

Exercice 9 Soit ψ une fonction de $\mathcal{C}^\infty$

1. Déterminer la distribution $\psi\delta$.
2. En déduire $\psi\delta$ quand $\psi(x) = x$.

Exercice 10

1. Soit g une fonction de $\mathcal{C}^\infty$ et $T \in \mathcal{D}'$ Montrer que

$$(gT)' = g'T + gT'$$

2. Calculer les dérivées des distributions suivantes

$$\sin(x)T_H, \qquad \cos(x)T_H, \qquad \sin(\pi x)\mathbb{1}_{]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[}$$

Exercice 11 Calculer la dérivée au sens des distribu- tions de la fonction :
(1) $f(x) = |x|$
(2) $g(x) = sgn(x)$ $\quad (g(x) = 1 \text{ si } x > 0,\ g(x) = -1 \text{ si } x < 0 \text{ et } g(x) = 0 \text{ si } x = 0)$

Exercice 12 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

et soit T_f l'application définie sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ par :

$$< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \qquad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

1. Montrer que T_f définit une distribution sur $\mathbb{R}$
2. Calculer la dérivée de T_f (notée T_f')
3. Calculer la dérivée seconde de T_f (notée T_f'')

Scanné avec CamScanner

Exercice 13 Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose $D = -\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx}$ et

$$< T, \varphi >= \int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx$$

où a est une constante, f et g sont deux fonctions de classe $C^2(\mathbb{R})$ vérifiant les conditions :

$$Df(x) = Dg(x) = 0, \quad f(a) - g(a) = 1, \quad f'(a) - g'(a) = 5.$$

Montrer q'au sens des distributions $DT = \delta_a' + \delta_a$.

Exercice 14 Dans le plan (x, y), on appelle fonction de Heaviside la fonction $H(x, y)$ égala à 1 si $x \geq 0$ et $y \geq 0$ et à 0 ailleurs. Montrer que l'on a, au sens des distributions

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = \delta_{(0,0)}$$

Exercice 15 Soit $u(x, t)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha \text{ si } t^2 - x^2 \geq 0, \quad t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $u(x, t)$ définit une distribution dans $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer au sens de distributions l'expression

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u,$$

où $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ étant l'opérateur des ondes.

3. Déterminer α de façon que $u(x, t)$ soit solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta$$

où v est une constante positive et $\delta = \delta(x, t)$ la distribution de Dirac.

Exercice 16 Soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\check{\varphi}(x) = \varphi(-x).$$

Une distribution T est dite paire si

$$< T, \check{\varphi}(x) >=< T, \varphi >$$

et impaire si

$$< T, \check{\varphi}(x) >= - < T, \varphi >$$

Soit T une distribution, étudier la parité des distributions U et V définies par

$$< U, \varphi >=< T, \varphi > + < T, \check{\varphi} >, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

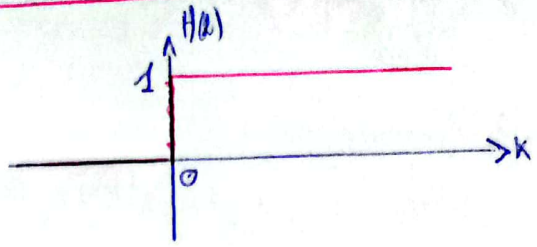
$$< V, \varphi >=< T, \varphi > - < T, \check{\varphi} >, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

Exercice 17 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ l'opérateur de Cauchy-Riemann. Calculer, au sens des distributions, l'expression $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.

Scanné avec CamScanner

Correction de TD



* Exercice 3 :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 ; \\ 0 & \text{si } x < 0 ; \end{cases}$$

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$; en effet :

1ère méth : Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(a,b \in \mathbb{R}, a<b)$

on a : $\int_a^b H(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } b<0 \\ \int_0^b dx = b & \text{si } a<0<b \\ \int_a^b dx = b-a & \text{si } a>0 \end{cases}$

Autrement 2ème méth : H est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc elle est loc. intég sur $\mathbb{R}$.

⊛ $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ donc $T_H \in \mathcal{D}'$; $\langle T_H, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$

Rque si $\Omega = \mathbb{R}^n \Rightarrow \langle T_H, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n)\,dx_1 \dots dx_n$

* Exercice 4 :

* Soit V un ouvert ne contenant pas 0 mque $\delta = 0$ sur V

↳ $\Leftrightarrow \langle \delta, \varphi \rangle = 0, \ \varphi \in \mathcal{D}_{\text{Supp} \subset V}$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp}\,\varphi \subset V$

on a $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$ car $\{0\} \notin \text{supp}\,\varphi$

* $\text{Supp}\,\delta = (\mathbb{R} \setminus \{0\})^c = \{0\}$

(dans le cas général : $\text{Supp}\,\delta_a = \{a\}$)

(distr. régulière → $\int$; distr. de dirac → pas d'intég ; autre distr)

(Valeur abs. : $f \mapsto |f|$ n'est pas linéaire)

* Exercice 5 :

- 1 - $\langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$

$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$\varphi \mapsto \langle T, \varphi \rangle = |\varphi(0)|$

T n'est pas linéaire car : $\langle T, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = |\varphi_1(0) + \varphi_2(0)|$

$\neq |\varphi_1(0)| + |\varphi_2(0)|$

$\neq \langle T, \varphi_1 \rangle + \langle T, \varphi_2 \rangle$

Scanné avec CamScanner

-2- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{x^2} dx$

($\langle T,\varphi\rangle$ dist. ↔ • vérifier la linéarité si linéaire • vérifier la continuité)

* Test linéaire :

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$$\langle T, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_1(\varphi_1)'(x) e^{x^2} + \alpha_2(\varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \alpha_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_1)'(x) e^{x^2} dx + \alpha_2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_2)'(x) e^{x^2} dx$$

$$= \alpha_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle T, \varphi_2 \rangle$$

* soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D} \;/\; \varphi_n \longrightarrow \varphi$

$$\begin{cases} \text{il } \exists K : \text{compact de } \mathbb{R} \text{ tq } \operatorname{supp} \varphi_n \subset K \\ \sup_K |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \xrightarrow[+\infty]{} 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

($\|\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}\| \to 0$)

on a $|\langle T, \varphi_n \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = |\langle T, \varphi_n - \varphi \rangle|$

$e^{x^2} \longrightarrow 2xe^{x^2}$; IPP ; $\varphi_n' - \varphi' \to \varphi_n - \varphi$

$$= \left| \left[(\varphi_n - \varphi) e^{x^2}\right]_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a} (\varphi_n - \varphi) 2x e^{x^2} dx \right| \leq \int_K |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)| e^{x^2} dx$$

$$\leq \sup_{x \in K} |\varphi_n'(x) - \varphi'(x)| \int_K e^{x^2} dx \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

($(\varphi_n(a) = 0,\ \varphi(a) = 0$; $\int_{-a}^{a} e^{x^2} dx = [e^{x^2}]_{-a}^{a}$)

car $\{-a, a\} \notin \operatorname{supp} \varphi_n$

-3- $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x \, dx$; $x \longmapsto \cos x$ est loc intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc $\langle T, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cos x \, dx$ est une dist : c'est la dist. régulière associée où la fct $x \longmapsto \cos x$

Scanné avec CamScanner

-4- $\langle T_1, \varphi \rangle = \varphi(2) - \varphi(10) = \langle \delta_2, \varphi \rangle - \langle \delta_{10}, \varphi \rangle = \langle \delta_2 - \delta_{10}, \varphi \rangle$

$T = \delta_2 - \delta_{10}$ est une dist

-5- $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, \varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy$

* Test linéarie....

* Test continue, en effet:

Soit $(\varphi_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) / \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$; $\operatorname{Supp} \varphi_n \subset [-a,a]^2, \forall n$

$$|\langle T_1, \varphi_n \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle| = |\langle T_1, \varphi_n - \varphi \rangle| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy \left(\varphi_n''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \right) dx\, dy \right|$$

$$\leq \sup_{[-a,a]^2} \left| \varphi_n''(x) - \varphi''(x) \right| \left(\int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} |xy|\, dx\, dy \right) \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

($\sup \to 0$ car $\varphi_n'' \to \varphi''$; $\int\int < +\infty$)

D'où $\langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle T, \varphi \rangle$

-6- $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t,t)\, dt$

Linéarité ⊛ $\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (\alpha\varphi_1(t,t) + \beta\varphi_2(t,t))\, dt$

$$= \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t,t)\, dt + \beta \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(t,t)\, dt$$

$$= \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle$$

⊛ Soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D} / \varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} 0$

on a: $|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{-a}^{a} \varphi_n(t,t)\, dt \right| \leq \sup_{[-a,a]} |\varphi_n| \int_{-a}^{a} dt \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ($\int_{-a}^{a} dt = 2a$)

(Dist. régulière associé à la fonct const 1: $\langle T_1, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, dx\, dy$

Scanné avec CamScanner

Exercice 6 :

- 1 - $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$: $\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\,dt$; on pose $t = x v$, $dt = x\,dv$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(xv)\, x\, dv = \varphi(0) + x\int_0^1 \varphi'(xv)\,dv$$

$$= \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xv)\,dv$$

avec $\psi(x) = \dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}$

φ cont sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[\longrightarrow \exists c \in]0,x[$

$\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \varphi'(c) = \psi(x)$ (TAC)

$$|\psi(x)| = |\varphi'(c)| \leq \sup|\varphi'(x)| \Leftarrow \leq \|\varphi'\|_\infty$$

- 2 - $\varphi \in \mathcal{D}$; $(\text{supp}\,\varphi \subset [-a,a])$

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{a\geq|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(0) + x\,\psi(x)}{x}\,dx = \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{\varphi(0)}{x}\,dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \psi(x)\,dx$$

$(\Leftrightarrow x \in]-\infty,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,+\infty[)$

$$= \varphi(0)\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \psi(x)\,dx$$

(*) $\displaystyle\int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \frac{1}{x}\,dx = \int_{[-a,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,a]} \frac{1}{x}\,dx = 0$ car $\left(x \to \frac{1}{x}\right.$ est impaire$\left.\right)$

* $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon\leq|x|\leq a} \psi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int \left(\psi(x)\,\mathbb{1}_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\right)dx$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,\mathbb{1}_{[-a,a]}\,dx = \int_{-a}^{a} \psi(x)\,dx < +\infty$$

$\left[\text{car } \left|\psi(x)\,\mathbb{1}_{\varepsilon\leq|x|\leq a}\right| \leq |\psi(x)| \leq \|\varphi'(x)\|_\infty\right]$

Scanné avec CamScanner

Alors: $\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_{|x| \geq a} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-a}^{a} \varphi(x) dx$

-3- Linéarité ....

. Continuité : soit $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) / \varphi_n \xrightarrow[+\infty]{\mathcal{D}} \varphi$

$M_q \quad \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi_n \rangle \xrightarrow[+\infty]{} \langle vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$

on a

$$\left| \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi_n \rangle - \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi \rangle \right| = \left| \langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi_n - \varphi \rangle \right|$$

$$= \left| \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi_n(x) - \varphi(x)}{x} dx \right| = \left| \int_{-a}^{a} (\varphi_n(x) - \varphi(x)) dx \right|$$

$$\leq \int_{-a}^{a} |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq 2a \, \|\varphi_n' - \varphi'\|_{\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

(majoration (1)+(2))

EXERCICE 7 :

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \mathbb{1}_{\{a\}}(x)$

$f = T_f$: dist. associée à f

* $\text{supp } f(x) = \{a\}$

* $\text{supp } f = \text{supp } T_f$? ; soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$\langle f, \varphi \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = 0$ car $f = 0$ pp

Alors $\text{supp } T_f = \emptyset$ (opposé de 0)

Remarque :

si f est continue alors $\text{supp } f(x) = \text{supp } T_f$.

Scanné avec CamScanner

Exercice 8 :

$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

($T = 0$ sur $V \Leftrightarrow \langle T, \varphi \rangle = 0$, $\varphi \in \mathcal{D}$ avec $\text{supp} \subset V$)

(il faut que la dist. est nulle)

-1- $T_H + \delta$ est nulle sur $\mathbb{R}^-$ $\Rightarrow$ peut être inv

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle T_H + \delta, \varphi \rangle = \langle T_H, \varphi \rangle + \langle \delta, \varphi \rangle$

$= \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx + \varphi(0) = 0$ ssi

φ est nulle sur $[0, +\infty[$ $\Leftrightarrow$ $\text{supp}\,\varphi \subset]-\infty, 0[$

② $\Delta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_k$ est nulle sur $]-\infty, 0]$ $\mathbb{R}|\mathbb{Z}$

en effet ; $\varphi \in \mathcal{D}$: $\langle \Delta, \varphi \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle \delta_k, \varphi \rangle$

$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(k) = 0$ ssi φ est nulle ssi

$[\Leftrightarrow \text{supp} \subset \mathbb{R}|\mathbb{Z}]$

Exercice 11 :

1 - $f(x) = |x|$; . $T_f \in \mathcal{D}'$ donc T_f est dérivable et on a $T_f' = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$; on a $\langle T_f', \varphi \rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi'(x)\,dx$

$= -\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} |-x|\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx = +\int_{-\infty}^{0} (x)\,\varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} x\,\varphi'(x)\,dx$

Ipp $\begin{vmatrix} u \to 1 \\ \varphi'(x) \to \varphi(x) \end{vmatrix}$ $= [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ Ipp pour récupérer

avec $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

-2- soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a $\langle T_g', \varphi \rangle = -\langle T_g, \varphi'(x) \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi'(x)\,dx$

$= \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = [\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - [\varphi(x)]_{0}^{+\infty} = 2\varphi(0) = \langle 2\delta, \varphi(x) \rangle$

Scanné avec CamScanner

-3- $R(x) = 1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}(x)$; $T_R \in D'$; $T_R' = ?$

Soit $\varphi \in D$; on a $\langle T_R', \varphi(x) \rangle = -\langle T_R, \varphi'(x) \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi'(x)\,dx = -[\varphi(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$

$= -\varphi(\frac{1}{2}) + \varphi(-\frac{1}{2}) = -\langle \delta_{\frac{1}{2}}, \varphi \rangle + \langle \delta_{-\frac{1}{2}}, \varphi \rangle$

$= \langle \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}, \varphi \rangle \Rightarrow T_{1_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}} = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{T_{1_{[a,b]}} = \delta_a - \delta_b}$

Tout dist : distribution triviale

Scanné avec CamScanner

Exercice 13 :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a : $\langle DT, \varphi \rangle = \left\langle \left(-\frac{d^2}{dx^2} + 4\frac{d}{dx} \right) T, \varphi(x) \right\rangle$

$$= \langle -T'' + 4T', \varphi(x) \rangle = -\langle T'', \varphi \rangle + 4\langle T', \varphi(x) \rangle$$

$$= -(-1)^2 \langle T, \varphi''(x) \rangle - 4\langle T, \varphi'(x) \rangle$$

$$= -\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi''(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi''(x)dx - 4\left[\int_{-\infty}^{a} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{a}^{+\infty} g(x)\varphi'(x)dx \right]$$

IPP : $f(x) \to f'(x)$; $\varphi'' \to \varphi'$; $f \to f$; $\varphi' \to \varphi$; $g(x) \to g'(x)$; $\varphi'' \to \varphi'$; $g \to g$; $\varphi' \to \varphi$

$$\langle DT, \varphi \rangle = -\left[f(x)\varphi'(x) \right]_{-\infty}^{a} + \int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi'(x)dx - \left[g(x)\varphi'(x) \right]_{a}^{+\infty} + \int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi'(x)dx$$

($f' \to f''$, $\varphi' \to \varphi$; $g' \to g''$, $\varphi' \to \varphi$)

$$- 4\left[f(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{a} + 4\int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx - 4\left[g(x)\varphi(x) \right]_{a}^{+\infty} + 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$$

$$= -f(a)\varphi'(a) + g(a)\varphi'(a) - 4f(a)\varphi(a) + 4g(a)\varphi(a)$$

$$+ \left[f'(x)\varphi(x) \right]_{-\infty}^{a} - \int_{-\infty}^{a} f''(x)\varphi(x)dx + \left[g'(x)\varphi(x) \right]_{a}^{+\infty} - \int_{a}^{+\infty} g''(x)\varphi(x)dx$$

($f'(a)\varphi(a)$; $-g'(a)\varphi(a)$)

$$+ 4\int_{-\infty}^{a} f'(x)\varphi(x)dx + 4\int_{a}^{+\infty} g'(x)\varphi(x)dx$$

$$= -\varphi'(a)\left[f(a) - g(a) \right] + 4\varphi(a)\left[f(a) - g(a) \right] + \varphi(a)\left[f'(a) - g'(a) \right]$$

($f(a) - g(a) = 1$; $f(a) - g(a) = 4$; $f'(a) - g'(a) = 5$)

$$+ \int_{-\infty}^{a} \left(4f'(x) - f''(x) \right)\varphi(x)dx + \int_{a}^{+\infty} \left(4g'(x) - g''(x) \right)\varphi(x)dx$$

($Df = 0$; $Dg = 0$)

$$= -\varphi'(a) + 5\varphi(a) = 5\langle \delta_a, \varphi(x) \rangle - \langle \delta_a, \varphi'(x) \rangle$$

$$= \langle 5\delta_a, \varphi(x) \rangle + \langle \delta_a', \varphi(x) \rangle = \langle 5\delta_a + \delta_a', \varphi(x) \rangle$$

$$\Rightarrow \boxed{DT = 5\delta_a + \delta_a'}$$

Scanné avec CamScanner

Exercice 9 :

$\psi \in \mathcal{C}^\infty$, $S \in \mathcal{D}' \Rightarrow \psi S \in \mathcal{D}'$

-1- $\psi S = ?$

soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a : $\langle \psi(x) S, \varphi(x) \rangle = \langle S, \psi(x)\varphi(x) \rangle = \psi(0)\varphi(0)$

$= \psi(0)\langle S, \varphi \rangle = \langle \psi(0) S, \varphi \rangle$

Alors : $\boxed{\psi \delta_0 = \psi(0)\delta_0}$

-2- $S \in \mathcal{D}'$ car $x \mapsto x$ est $\mathcal{C}^\infty$, $S \in \mathcal{D}'$ $\Rightarrow xS \in \mathcal{D}'$

$xS = 0$

$e^x S = S$

$\cos S = S$

$\sin S = 0$

Exercice 10 :

-1- soit $\varphi \in \mathcal{D}$ on a :

$\langle gT', \varphi \rangle = \langle T', g\varphi \rangle = -\langle T, (g\varphi)' \rangle = -\langle T, g'\varphi + g\varphi' \rangle$

$= -\langle T, g'\varphi \rangle - \langle T, g\varphi' \rangle = -\langle g'T, \varphi \rangle - \langle gT, \varphi' \rangle$

$= -\langle g'T, \varphi \rangle + \langle (gT)', \varphi \rangle = \langle (gT)' - g'T, \varphi \rangle$

$= \langle (gT)', \varphi \rangle - \langle g'T, \varphi \rangle$

Alors $(gT)' = g'T + gT'$

-2- $T_H \in \mathcal{D}'$, $x \mapsto \sin x$ est $\mathcal{C}^\infty$ $\Rightarrow \sin x\, T_H \in \mathcal{D}'$ donc elle est dérivable.

on a : $(\sin x\, T_H)' = (\sin x)' T_H + \sin x\, T_H' = \cos x\, T_H + \sin x\, \delta$

$= \cos T_H + \sin(0)\,\delta = \cos x\, T_H$

$T_f = f$

$(\cos T_H)' = -\sin x\, T_H + \cos x\, T_H' = -\sin x\, T_H + \cos x\,\delta = -\sin x\, T_H + \delta$

$\sin 1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = ?$

$1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \in L^1_{loc} \Rightarrow T_{1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

$x \mapsto \sin(\pi x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ (10) $\Rightarrow \sin(\pi x)\, T_{1_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} \in \mathcal{D}'$

Scanné avec CamScanner

$$\left(\sin(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}\right)' = \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin(\pi x)\, T'_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}$$

$$= \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin(\pi x)\left(\delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}\right)$$

(indicatrice)

$$T'_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} = T_{\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)'} + (0-1)\delta_{\frac{1}{2}} + (1-0)\delta_{-\frac{1}{2}} = \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}$$

$\left(\left(\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\right)' = 0\right)$

$$= \pi\cos(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}} + \sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\delta_{-\frac{1}{2}} - \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\delta_{\frac{1}{2}}$$

$$= \pi\cos(\pi x)\, \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} - \delta_{-\frac{1}{2}} - \delta_{\frac{1}{2}}$$

$$\left\langle \left(\sin(\pi x)\, T_{\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}\right)', \varphi \right\rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \pi\cos(\pi x)\,\varphi(x)\,dx - \varphi'\left(-\tfrac{1}{2}\right) - \varphi\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

Exercice 16 :

✱ soit $\varphi \in \mathcal{D}$ona : $\langle U, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle + \langle T, \check{\varphi} \rangle$

$= \langle T, \check{\varphi} \rangle + \langle T, \varphi \rangle = \langle U, \varphi \rangle$ donc U est paire

✱ $\langle V, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle - \langle T, \check{\check{\varphi}} \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle - \langle T, \varphi \rangle$

$= -\left(\langle T, \varphi \rangle - \langle T, \check{\varphi} \rangle\right) = -\langle V, \varphi \rangle$ impaire

Exercice 17 :

✱ $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$f(x,y) = x + iy$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$; $\left\langle \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{f(x,y)}\right); \varphi(x,y) \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f(x,y)}\right), \varphi(x,y) \right\rangle$

$$= -\frac{1}{2}\left\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) \right\rangle - \frac{i}{2}\left\langle \frac{1}{x+iy}, \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \right\rangle$$

Scanné avec CamScanner

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+iy}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}dx\,dy - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x+iy}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-iy}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy - \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x-iy}{x^2+y^2}\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}dx\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy + \frac{i}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+y^2}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy$$

passons $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$

$r > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$

$$dx\,dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta = r\,d\theta\,dr$$

Notons $\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

$\Rightarrow r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r} = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

$\cdot \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta} = -r\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -y\frac{\partial\varphi}{\partial x} + x\frac{\partial\varphi}{\partial y}$

Alors: $\left\langle \frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right), \varphi\right\rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\cdot r\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}r\,dr\,d\theta - \frac{i}{2}$

$\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$-\frac{i}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\theta}r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{+1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\tilde{\varphi}(r,\theta)\right]_{r=0}^{r=2\pi}d\theta = \frac{+1}{2}\int_0^{2\pi}\hat{\varphi}(0,\theta)\,d\theta$$

$\hat{\varphi}(0,\theta) = \varphi(0,0)$

$$-\frac{i}{2}\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^2}\left[\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0)\right]r\,dr$$

$\tilde{\varphi}(r,0) = \varphi(r,0)$

$\tilde{\varphi}(r,2\pi) - \tilde{\varphi}(r,0) = 0$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \frac{\varphi(0,0)}{2}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$= \frac{\varphi(0,0)}{2}\cdot 2\pi = \pi\varphi(0,0) = \pi\langle\delta_{(0,0)}, \varphi(x,y)\rangle = \langle\pi\delta_{(0,0)}, \varphi(x,y)\rangle$$

Donc: $\boxed{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{x+iy}\right) = \pi\delta}$ $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$

Scanné avec CamScanner

EXERCICE 15

$$u(x,t) = \begin{cases} \alpha \text{ si } t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

-1- u est continue par morceaux $(c.m) \Rightarrow u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ donc $T_u = u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$

-2- $P = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$; $Pu = ?$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a : $\langle Pu, \varphi(x,t)\rangle = \left\langle \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \varphi(x,t)\right\rangle$

$$= \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(x,t)\right\rangle - \left\langle u(x,t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,t)\right\rangle$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}\,dx\,dt - \iint_{\mathbb{R}^2} u(x,t)\frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}\,dx\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-|x|}^{+\infty} \alpha \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial t^2}\,dt\right)dx - \int_0^{+\infty}\left(\int_{-t}^{t} \alpha \frac{\partial^2 \varphi(x,t)}{\partial x^2}\,dx\right)dt$$

$$t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0 \Leftrightarrow t^2 \geq x^2 \Leftrightarrow t \geq |x|$$

$$t^2 - x^2 \geq 0,\ t \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq t^2,\ x \in [-t, t],\ t \geq 0$$

$$= \alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right]_{t=|x|}^{+\infty}dx - \alpha\int_0^{+\infty}\left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right]_{x=-t}^{x=t}dt$$

$$= -\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial \varphi(x,|x|)}{\partial t}\,dx - \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial x}\,dt + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi(-t,t)}{\partial x}\,dt$$

$$= -\alpha\int_{-\infty}^{0}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,-x)\,dx - \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t)\,dt + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x,x)\,dx - \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t)\,dt + \alpha\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(-t,t)\,dt$$

$$= -\alpha\left(\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi(x,x)}{\partial x}dx + \int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi(t,t)}{\partial x}dt\right) - \alpha\left(\int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi(-x,x)}{\partial t}dx - \int_0^{+\infty}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t,t)\,dt\right)$$

Posons $\Phi_1(u) = \varphi(u,u) \longrightarrow \Phi_1'(u) = \dfrac{\partial \varphi(u,u)}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

$\Phi_2(u) = \varphi(-u,u) \longrightarrow \Phi_2'(u) = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$

donc $P = -\alpha\int_0^{+\infty}\Phi_1'(u)\,du - \alpha\int_0^{+\infty}\Phi_2'(u)\,du - \alpha\left[\Phi_1(u)\right]_0^{+\infty} - \alpha\left[\Phi_2(u)\right]_0^{+\infty}$

$$= \alpha\Phi_1(0) + \alpha\Phi_2(0) = \alpha\varphi(0,0) + \alpha\varphi(0,0) = 2\alpha\varphi(0,0)$$

$$= 2\left\langle \delta_{(0,0)}, \varphi(x,t)\right\rangle = \left\langle 2\alpha\,\delta_{(0,0)}, \varphi(x,t)\right\rangle$$

Donc : $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\,\delta_{(0,0)}$

Scanné avec CamScanner

- 3 - on prend $\xi = vt$ pour le dernier cas donc $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\,\delta_{(0,0)}(x, vt)$

avec $\langle \delta_{(0,0)}(a, vt), \varphi(x,t)\rangle = \frac{1}{v}\langle \delta_{(0,0)}(x,t), \varphi(x, \frac{t}{v})\rangle = \frac{1}{v}\varphi(0,0)$

$= \frac{1}{v}\langle \delta_{(0,0)}(x,t), \varphi(x,t)\rangle = \frac{1}{v}\varphi(0,0)$

donc $\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = 2\alpha\frac{1}{v}\delta_{(0,0)}(x,t)$

on prend $\alpha = \frac{v}{2}$ pour avoir δ à droite $= 1$

Scanné avec CamScanner